Dodatna nastava iz matematike za 1. razred

Razni zadaci

Predavač: Aleksandar Pejčev

1. Data je funkcija $f : R \to R$ koja zadovoljava
$$f(x+1) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$
Dokazati da je f periodična.

2. Odrediti sve prirodne brojeve k i pozitivne realne brojeve $x_1, ..., x_k$ tako da je $\sum_{i=1}^{k} x_i = 9$ i $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} = 1$

3. Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve vazi nejednakost
$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

4. Neka su P, Q, R tačke pravih odredjenih ivicama BC,CA,AB trougla ABC. Dokazati da se upravne na pravama BC, CA, AB u tačkama P, Q, R seku u jednoj tački akko je
$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0$$

5. Ako je a ivica, a D i d duža i kraća dijagonala pravilnog sedmougla dokazati da je $\frac{1}{a} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d}$.

6. Neka je P polinom sa celobrojnim koeficijentima i n neparan broj. Ako su $k_1, ...k_n$ takvi celi brojevi da je $P(k_1) = k_2, P(k_2) = k_3, ...P(k_n) = k_1$, dokazati da su svi oni medjusobno jednaki.

7. Dokazati da se od 25 košarkaša ne može napraviti više od 30 različitih ekipa tako da nikoje dve nemaju više od jednog zajedničkog igrača.

8. Neka je $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$ familija r-elementnih skupova, tako da svakih $r+1$ imaju zajednički element. Pokazati da onda svih k imaju zajednički element.

9. Dokazati da za svaki prirodan broj m postoji prirodan broj broj n takav da je $n^2 + 7$ deljivo sa 2^m.

10. U kvadratnoj mreži $(n-1) \times (n-1)$ svaki čvor je obojen crveno ili plavo. Koliko ima bojenja u kojima su u svakom jediničnom kvadratu tačno dva temena obojena u crveno?

11. Dat je graf u kom je svaki čvor stepena barem 3. Dokazati da on sadrži zatvorenu konturu parne dužine.

12. Dato je n tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i svaka duž njima odredjena je obojena u crveno ili plavo. Dokazati da je date tačke moguće označiti sa $B_1 B_2, \ldots, B_n$ tako da za neko $1 \leq i \leq n-1$ važi jedan od sledeća dva uslova:
    (a) duži $B_1B_2, \ldots, B_iB_{i+1}$ plave, a duži $B_{i+1}B_{i+2}, \ldots, B_nB_1$ crvene;
    (b) sve duži pomenute pod a) su iste boje.

13. U svakoj od 3 škole ima po n učenika i svaki učenik iz svake škole poznaje bar $n+1$ učenika iz preostale dve. Dokazati da postoje tri učenika, svaki iz po jedne škole, koji se medjusobno poznaju.

14. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao i O presek njegovih dijagonala. Označimo redom sa P i Q centre krugova opisanih oko trouglova ABO i CDO. Dokazati da je $AB + CD \leq 4PQ$.